Сложные задачи решай просто!

Рекомендации по решению задач по математике

для учащихся 5-11 классов

Авторы: Кривенко Елена Сергеевна,

Чургель Анастасия Алексеевна,

8 класс, МБОУ №91, Железногорск

Руководитель: Журавлева Екатерина Юрьевна,

учитель математики, МБОУ №91

г. Железногорск

2016 год

**От авторов**

Уважаемые ребята! Перед вами - не обычная книга по математике, потому что ее создали ваши ровесники. Мы адресуем ее тем ученикам, которым нужно устранить пробелы в знаниях научиться решать задачи так, чтобы контрольные работы и экзамены не вызывали страха и даже подружиться с математикой.

Мы поставили себе цель – создать перечень подробных рекомендаций, которые помогут вам выйти из затруднительного положения.

Уважаемые родители! Вам, как людям, изучавшим в свое время математику, а сейчас еще и имеющим жизненный опыт, будет легче организовать занятия Вашего ребенка. Наберитесь терпения и регулярно решайте задачи со своим ребенком, используя наши рекомендации.

**Общий алгоритм решения задач:**

1. Внимательно прочитать условие задачи.

2. Составить графическую подсказку таблицу (или предварительно схему и/или рисунок, если процесс движения или совершаемой работы) создать как приложение преимущества.

3. Установить зависимость величин

4. Определить неизвестные

5. Определить более удобный способ решения (см . Рекомендации)

5.1. Алгебраический

5.1.1. Определить какую величину лучше взять за х (см. Рекомендации)

5.1.2. Определить, как лучше составить математическую модель

5.2. Арифметический (решить по действиям) (см. Рекомендации)

7. Решить

8. Выразить другие величины с помощью полученного значения (если это требуется).

9.Записать ответ.

**Рекомендации для задач на формулы умножения**

Первый вопрос, который возникает при решении задач – какой формулой воспользоваться? Большое количество задач решается с помощью формул произведения, то есть формул в кторых одна величина является произведением двух других.

Для того, чтобы легче было определиться с нужной для решения задачи формулой, мы составили таблицу, которая поможет сопоставить содержание с формулой. Задачи можно распознать и из остальных по наименованиям, характерным словам и по описаниям процессов, которые происходят в задачах.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид | Движение  (S=Ut) | Работа  (A=pt) | Стоимость  (C=an) | Площадь  (S=ab) | Концентрация (m=pM) | |
| Характерные слова/ фразы | прошёл/ проехал, путь, за время и т.д. | сделал, изготовил х штук, за время и т.д. | стоит, штука, купил, продал и т.д. | длина, ширина, площадь | | Раствор, масса вещества, |
| Наименования | км/ч, час, км | час, штука, шт/ч | денежная единица, штука | см2, дм2, м2, км2 | | кг, г, л |
| Описание | Перемещение объекта в пространстве с опред. скоростью | Производство чего-либо, за опред. время | Кол-ное. соотнош. при обмене товарами | Опред. пространство на плоскости, измеряемое в квадратных единицах | |  |

Если Вы определились с выбором формулы – движемся дальше.

Вспомогательный рисунок полезен, если в задаче речь идет о движении в различных направлениях.

*Преимущества таблицы при решении задач*:

1. Внося данные таблицу, содержащую соответственно три столбца вы точно не перепутаете соответствующие величины.

2. Таблица является наглядной помощью для ученика. Разделение на столбики помогает не ошибиться в определении зависимости между величинами и объектами в том числе.

3. Хоть таблица и занимает немного больше места объем записей в ней гораздо меньше, так как название столбца исключает надобность пояснения

4. Решение в таблице поможет не допустить остаточно распространенной ошибки – работа с разными единицами измерения.

5. Таблица показывает количество неизвестных.

6. Так же если пользоваться нашими рекомендациями по составлению таблицы можно облегчить составление математической модели (см. Рекомендации по решению задач на формулу произведения п. 1.3)

• Определены величины

• Видны взаимоотношения между величинами

• Более короткая запись

• Легче отследить одинаковые наименования

• Легче определить неизвестные

• Поможет составить математическую модель

Надеемся, что мы убедили Вас. Продолжим.

1. Заполнение таблицы.

1.1. Желательно использовать таблицу для структуризации и сведения к минимуму потерю информации.

1.2. В шапке таблицы, рядом с величинами, мы предлагаем записать наименование, а затем сверить его с наименованиями данных по столбцам.

1.3. При введении переменной писать в одной клетке как буквенное, так и числовое выражение (так как они равны).

2. Выбор решения.

Важно, что в зависимости от того, какая из трех величин является постоянной, две другие связаны либо прямо пропорциональной, либо обратно пропорциональной зависимостью.

2.1 Арифметическое (решение по действиям).

2.1.1. Если известны две величины из трех (это как правило более простые задачи), то можно решить задачу без ввода переменной, а выразить искомую величину через две известные.

2.2 Алгебраическое

2.2.1 Если дано только отношение величин.

2.2.2 Если 2 и более неизвестных, не связанных между собой. (Например: имеется 2 неизвестные одинаковые величины, относящиеся к 2 разным объектам, которые нельзя выразить друг через друга).

2.2.3 При введении большего количества переменных легче составить модель, но важно помнить, что количество переменных не должно быть больше количества уравнений (в случае если нужно найти отношение величин, то одна из переменных может сократится)

3. Рекомендации по составлению математической модели

3.1. Если возможно, обозначите переменной главный вопрос задачи, так как не придется выполнять дополнительные действия, после решения уравнения.

3.2. За х лучше принимать меньшее значение из имеющихся. Особенно если сравнение кратное (во сколько то раз больше или меньше).

3.3. Если появляются затруднения с поиском равных величин, обратитесь к пункту 1.3

4. Решение

4.1. Следует перепроверять свои вычисления, чтобы избежать вычислительных ошибок.

4.2. Пишите пояснения к найденной величине, чтобы проверить логическое соответствие.

4.3. Перед окончательной записью ответа нужно проверить, соответствует ли найденное значение вопросу задачи.

**Примеры решения задач**

Задача 1

На 60 **км** *пути* велосипедист тратит на 4 **часа** больше *времени*, чем мотоциклист. Если же он увеличит *скорость* на 3 **км/ч**, то на тот же путь потратит в 4 раза больше *времени*, чем мотоциклист. Найдите *скорость* велосипедиста.

Итак, проверим условие на наличие характерных фраз, выделим их курсивом. Уже на этом этапе можно выделить три величины формулы движения: путь, скорость и время. Однако проверим и наименования, они выделены полужирным начертанием, можно заметить, что они так же соответствуют величинам той же формулы (движения). Наконец, в этой задаче происходит перемещение велосипедиста и мотоциклиста в пространстве, что позволяет нам точно определиться с формулой: S=Ut

Эту задачу можно решить 4 способами .

*Первый способ* – математическая модель с 2 переменными.

Пусть х (км/ч) – скорость велосипедиста, а y (км/ч) – скорость мотоциклиста, тогда найдем время велосипедиста по формуле, которую мы определили с помощью таблицы (S=Ut) - 60/х (ч), и время мотоциклиста –60/y (ч). Можно составить первое уравнение системы:

60/х – 60/y = 4

В предполагаемом варианте скорость велосипедиста будет (х+3) км/ч, а его время 60/(х+3), что по условию в 4 раза больше изначального времени мотоциклиста. Получаем второе уравнение системы:

60/(х+3)=4\*(60/y)

60/х – 60/y = 4

60/(х+3)=4\*(60/y)

*Второй способ* – решение в таблице с двумя переменными.

Запишем в таблицу известные данные. По известной формуле найдем время мотоциклиста в первом и во втором случаях. Запишем в одну клетку значение выраженное с помощью формулы и значение, выраженное с помощью данного нам отношения, учитывая что они равны составляем систему уравнений. (р.1.3)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S(км) | U(км/ч) | T(ч) |
| Велосипедист | 60км | x | На 4 часа больше  60/х |
| Мотоциклист | 60км | y | 60/х-4  60/y |
| Велосипедист | 60км | х+3(км/ч) | В 4 раза больше  60/(х+3)  60/у\*4 |
| Мотоциклист | 60км | у | 60/у |

60/(х+3)=4\*(60/y)

60/х – 4= 60/y

*Третий способ* – решение с одной переменной

Обозначим за х часов время мотоциклиста, тогда (х+4) часа время велосипедиста, а его скорость – 60/(х+4) (км/ч). Затем найдем его измененную скорость – ((60/(х+4)+3)(км/ч), значит его новое время – 60: (60/(х+4)+3)), что по условию в 4 раза больше х, получаем уравнение:

(60/(х+4)+3))=4х

*Четвертый способ* – решение в таблице с одной переменной.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S | U | t |
| Велосипедист | 60 км | 60/(х+4) | На 4 часа больше  х+4 |
| Мотоциклист | 60 км |  | х |
| Велосипедист | 60 км | 60/(х+4)+3 | В 4 раза больше  4х |
| Мотоциклист | 60 км |  | х |

Проанализировав способы решения с одной с двумя переменными, мы сделали вывод, который записали как рекомендацию (р. 2.2.3)

Эту задачу нельзя решить арифметически, так как в условии задачи дано только отношение величин, что требует переменной. (р 2.2.1)

Задача 2

Спортсмен *пробегает* 3 **километра** за 18 **минут**. Если он увеличит *скорость* на на 5 **км/час**, то на сколько **минут** быстрее он пробежит ту же дистанцию?

Решим эту задачу с помощью таблицы:

Составим таблицу, вписав в нее все известные данные.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S | U | t |
| На самом деле | 3 км |  | 18 минут |
| Предполагаем | 3 км | ув. на 5 км/ч | ? |

Невнимательный ученик мог бы упустить из виду то, что время у нас выраженно в минутах, а скорость в км/ч, это бы могло повлечь за собой ошибку. Для того чтобы исключить ее мы рекомендуем писать в шапке наименования каждой величины. (р. 1.2)

Нам необходимо привести все в единые единицы измерения. Переведем 18 минут в часы: 18/60=0,3 часа

Затем пользуясь формулой движения (S=Ut) найдем сначала скорость фактическую, затем предполагаемую скорость, а после - предполагаемое время.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S(км) | U(км/ч) | t (ч) |
| Фактическая | 3 км | 3/0,3= 10(км/ч) | 18 минут  На **? меньше**  =0,3 часа |
| Предполагаемая | 3 км | ув. на 5 км/ч  3/0,3+5=15(км/ч) | 3/15= 0,2 часа = 12 минут |

Теперь мы можем найти главный вопрос задачи 18 – 12 = 6(минут)

Решим эту задачу сначала алгебраическим способом.

Пусть х (км/час) – скорость, с которой спортсмен бежал на самом деле. Тогда, пользуясь формулой движения, найдем скорость фактическую х=3/0,3

x = 10

Возьмем новую переменную.

Путь х – предполагаемое время. Так как скорость увеличилась на 5 (км/ч) она равна (10+5) (км/ч). Пользуясь формулой, найдем время :

х = 3/(10+5) = 0,2

0,2 часа = 12 минут, теперь мы можем найти разницу:

18 – 12 = 6 (минут)

Так же эту задачу можно решить *по действиям*.

1. 3/(18/60)=10(км/ч) U « на самом деле»

2 .10 + 5=15(км/ч) U «предполагаемое»

3. 3\15=0,2(ч) t «предполагаемое»

4. 0,2\*60= 12(мин) t «предполагаемое»

5. 18 – 12=6 (мин) разница

В этом случае алгебраический способ оказался наименее удобным, так как, когда у нас имеется 2 известные величины неизвестное проще найти без введения переменной (р. 2.1.1.).

Задача 3

Машинистка начала *перепечатывать* рукопись, через 4 **ч** к ней присоединилась вторая машинистка. *Проработав* 8 **ч**. они закончили перепечатку всей рукописи. За сколько **часов** каждая может перепечатать всю рукопись, если первой на это требуется на 8 **ч**. Больше чем второй?

**Анализ текста**: 4,8 часов, следовательно, используемая величина – время, значит эта задача «на движение» или «на работу».

**По описанию** происходит производство рукописи, поэтому используем формулу:A=pt.

**Составляем таблицу:**

В первой строчке указываем рассматриваемые величины во второй строчке будем давать характеристику первой машинистки а в третьей – второй.

В столбике время указываем общие единицы измерения, чтобы в случае их расхождения привести к единообразию. Вносим время работы первой машинистки до прихода второй. Учитывая время общей работы, добавляем его ко времени работы первой машинистки. Так как они перепечатали всю рукопись, общая работа равна 1. Вводим две переменные – производительность первой и второй машинистки.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | | **p** | **T(ч)** |
| **1 машинистка** | **1** | **(4+8)х** | **х** | **4 (ч)+8(ч)** |
| **2 машинистка** | **8y** | **у** | **8(ч)** |

Составим первое уравнение системы: 8у+(4+8)х = 1

Нам необходимо найти условие для составления второго уравнения. Так как время второй машинистке потребуется больше чем второй на 8 часов, то внесем эту информацию во вторую часть таблицы. Учитываем, что производительность осталась прежней ( в столбце производительность) и всю работу выполняет каждая из них ( в столбце работа ).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | | **p** | **T(ч)** |
| **1 машинистка** | **1** | **(4+8)х** | **х** | **4 (ч)+8(ч)** |
| **2 машинистка** | **8y** | **у** | **8(ч)** |
| **1 машинистка** | **1** |  | **х** | **На 8 часов больше 1/х** |
| **2 машинистка** | **1** |  | **у** | **1/у**  **1/х - 8** |

Из формулы работы выражаем время 1/х (часов) – время работы 1 машинистки, 1/у (часов) - время 2 машинистки. Замечаем, что время работы второй машинистки содержит два выражения, которые равны между собой. Получаем второе уравнение системы и объединяем с первым.

1/х- 8= 1/у

8у+(4+8)х = 1

Задача 4:

Заданы 2 числа. Сумма этих чисел равна 80. Если первое число уменьшить в 2 раза, а второе число увеличить в 2 раза, то в сумме получим 115. Чему равны эти числа?

Решим эту задачу алгебраически. Для этого сначала построим таблицу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Было | Изменилось | Стало |
| Первое число | х | Ум. В 2 раза | 0,5х |
| Второе число | у | Ув в 2 раза | 2х |
| Сумма первого и второго числа | х+у  80 |  | 115  2х +0,5х |

Путь х – первое число, а у – второе. Мы сразу можем составить первое уравнение системы: х+у=80

Затем произведем изменения и получим второе уравнение системы :

0,5х + 2у = 115

х+у=80

Задача 5

« Два плотника рядились двор *ставить*. И говорит первый:

- Только бы мне одному двор ставить, то я бы *поставил* за 3 **года**.

А другой молвил:

- Я бы поставил его в шесть **лет**.

Оба решили сообща *ставить* двор. Сколь долго они ставили двор?

Эту задачу можно решить 3 способами.

*Первый способ*- решить таблицей.

Определив формулу по уже разработанному принципу, составляем таблицу.

Обозначим всю работу за 1, впишем известные данные.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **p** | **t** |
| **1 плотник** | **1 двор** |  | **3 года** |
| **2 плотник** | **1 двор** |  | **6 лет** |
| **1+2** | **1 двор** |  | **?** |

Работая по формуле A=pt найдем, производительность каждого плотника, а затем их общую производительность.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **S** | **U** | **t** |
| **1 плотник** | **1 двор** | **1/3 двора в год** | **3 года** |
| **2плотник** | **1 двор** | **1/6 двора в год** | **6 лет** |
| **1+2** | **1 двор** | **1/3+1/6=1/2**  **двора в год** | **?** |

Теперь мы знаем все необходимые данные, чтобы найти время, за которое они построят двор, работая вместе:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **p** | **t** |
| **1 плотник** | **1 двор** | **1/3 двора в год** | **3 года** |
| **2 плотник** | **1 двор** | **1/6 двора в год** | **6 лет** |
| **1+2** | **1 двор** | **1/2 двора в год** | **2 года** |

*Второй способ* - решить по действиям.

Здесь мы так же обозначим всю работу за 1. Пользуясь установленной формулой: A=pt, первым действием найдем производительность 1 плотника.

1) 1:3= 1/3 (двора/год)

Вторым действием найдем производительность второго плотника.

2) 1:6=1/6(двора/год)

Третьим действием найдем общую производительность

3) 1/3+1/6=1/2(двора/год)

Четверым действием найдем главный вопрос задачи

4) 1:1/2=2(года)

*Третий способ* - решить с помощью математической модели с одной переменной.

Работу обозначаем за 1, а главный вопрос задачи за х(лет), найдем производительность каждого

1:3=1/3(двора в год) производительность первого плотника

1:6=1/6 (двора в год) производительность второго плотника

составим уравнение:

1/(1/3+1/6)=х

1/(1/2)=х

х=2