Сборник задач

Содержание

1. Теорема Менелая…………………………...…………………......2
2. Инструкция ……………................................................................4
3. Образцы решения задач с комментариями ……………………...6
4. Задачи для самостоятельного решения ………………………...25
5. Ответы…………………………………………………………….29
6. Литература……………………………………………………......30

**I Теорема Менелая(о треугольнике и секущей)**

**Пусть в треугольнике АВС точка А1  лежит на стороне ВС, точка С1 – на стороне АВ, а точка В1  - на продолжении стороны АС за точку С.**

**Если точки А1, В1 и С1 лежат на одной прямой (рис. 1), то выполняется равенство** $\frac{AC1 }{C1B } $**•** $\frac{BA1}{A1C}$ **•** $\frac{CB1}{B1A}$ **= 1 (\*)**



Рис. 1

**Обратно, если выполняется равенство (\*), то точки А1, В1 и С1 лежат на одной прямой.** *(Заметим, что можно считать В1С1 секущей треугольника АВС, а можно считать ВС секущей треугольника АВ1С1).*

а) Предположим, что точки А1, В1 и С1 лежат на одной прямой. Проведем

СК ║ АВ (рис. 1).

∆ СКВ1 ~∆АС1В1, поэтому $\frac{СК}{АС1}$ = $\frac{СВ1}{АВ1}$ , откуда СК = $\frac{СВ1}{АВ1}$ ∙ АС1.

Далее: ∆ СКА1 ~∆ВС1А1 , значит, $\frac{СК}{ВС1}$ = $\frac{СА1}{ВА1}$ .

Подставляя сюда выражение для СК, получим $\frac{CВ1 }{АВ1 } $• $\frac{AС1}{ВС1}$ = $\frac{CА1}{ВА1}$ , т. е.

$\frac{AC1 }{C1B } $• $\frac{BA1}{A1C}$ • $\frac{CB1}{B1A}$ = 1 , что и т. д.

б) Пусть выполнено равенство (\*) для точек А1, В1 и С1 (рис. 2), докажем, что эти точки лежат на одной прямой.

****

Рис. 2

Через две точки А1 и В1 проведем прямую, пусть С2 – ее точка пересечения с прямой АВ (точка пересечения будет лежать на отрезке АВ).

Три точки А1, В1 и С2 лежат на одной прямой и по доказанному в пункте а) выполняется равенство $\frac{AC2 }{C2B } $• $\frac{BA1}{A1C}$ • $\frac{CB1}{B1A}$ = 1.

Сравнив это равенство с равенством (\*), придем к выводу, что $\frac{AС2}{С2В}$ = $\frac{АC1}{С1В}$ .

Точки С2 и С1 лежат на отрезке АВ и делят его в одном отношении, считая от конца А. Следовательно, точка С2 совпадает с точкой С1 , т.е. точки А1, В1 и С1 лежат на одной прямой.

*Стрелки на рисунке 1 (от точки А) показывают, как легко запомнить последовательность отрезков в пропорции (\*).*

***Вершина –точка – точка – вершина***

[3]

**II Инструкция по применению теоремы Менелая**

Чтобы применить теорему Менелая необходимо рассмотреть:

1. треугольник;
2. прямую, пересекающую две стороны этого треугольника и продолжение третьей.
3. Выбери треугольник, в котором известны отношения частей сторон. Проверь, не проходит ли прямая, пересекающая стороны треугольника, через вершину угла.
4. Составь равенство: $\frac{АК}{КВ}$ ∙ $\frac{ВМ}{МС}$ ∙ $\frac{CD}{DA}$ = 1



1. Составленное равенство – проверь по схеме: *вершина –точка – точка – вершина* Треугольник - это вершина, круг – это точка. Точки «перемещаются» из числителя дроби в знаменатель, а вершины из числителя одной дроби в знаменатель другой*.*



Обрати особое внимание на точку, лежащую на **продолжении** стороны треугольника: Проверь, записано ли у тебя **произведение** отношений, а не привычное равенство, используемое в подобных треугольниках.

1. Из полученного равенства находи нужное отношение.

***Помни, чтобы увидеть всю красоту теоремы Менелая и добиться успеха нужно решить не менее 10 задач***

**II Образцы решения задач с комментариями**

Задачи, которые решаются с помощью теоремы Менелая

**Задача 1**

В треугольнике АВС на стороне ВС взята точка N так, что NC=3BN; на продолжении стороны АС за точку А взята точка М так, что МА = АС. Прямая MN пересекает сторону АВ в точке F. Найдите отношение BF:FA. [1]

*Указание: равные отрезки обозначайте одной буквой.*

Решение:



Рассмотрим треугольник АВС и секущую MN:

По условию задачи МА = АС, NC = 3BN. Пусть MA = AC =b, BN = k, NC = 3k. Прямая MN пересекает две стороны треугольника АВС и продолжение третьей.

По теореме Менелая:

$\frac{CN }{NB } $• $\frac{BF}{FA}$ • $\frac{AM}{MC}$ = 1 , $\frac{3k }{k } $• $\frac{BF}{FA}$ • $\frac{b}{2b}$ = 1 , $\frac{BF}{FA}$ • $\frac{3}{2}$ = 1 , $\frac{BF}{FA}$ = $\frac{2}{3}$

Ответ: 2:3

**Задача 2**

*Усложнение: указаны не числовые, а буквенные данные; рассматривается не данный треугольник, а его часть.*

На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне РR – точка L, причем NQ = LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении m:n, считая от точки Q. Найдите отношение PN : PR. [1]

*Указание: равные отрезки обозначь одной буквой.*

Решение:



Рассмотрим треугольник PQL и секущую NS.

По теореме Менелая:

$\frac{PN }{NQ } $• $\frac{QS}{SL}$ • $\frac{LR}{PR}$ = 1

Пусть NQ = LR = а, тогда $\frac{PN }{a } $• $\frac{m}{n}$ • $\frac{a}{PR}$ = 1 , $\frac{PN }{PR} $= $\frac{n}{m}$

Ответ: n: m

**Задача 3**

*Усложнение: теорема Менелая применяется не к данному треугольнику, а к его части. Точка лежащая на продолжении стороны выбранного треугольника, является вершиной данного треугольника.*

Точка N лежит на стороне АС треугольника АВС причем AN : NC = 2 : 3. Найти в каком отношении медиана АМ делит отрезок BN. [3]

*Указание: если отрезок АВ делится точкой Х, то отношение начинается с первой точки -* $\frac{AX}{XB}$

Решение:



По условию $ \frac{AN}{NC}$ = $\frac{2}{3}$

Применим теорему Менелая для треугольника NBC и секущей АМ, так как известно в каком отношении прямая делит сторону ВС и продолжение стороны NC; найти нужно в каком отношении она делит третью сторону треугольника NBC.

(По теореме Менелая) $ \frac{NO }{OB } $• $\frac{BM}{MC}$ • $\frac{CA}{AN}$ = 1, так как $\frac{MB}{MC}$ = 1,

так как АМ – медиана => $\frac{NO }{OB }$ ∙ 1 ∙ $\frac{5}{2}$ = 1 => $\frac{ON }{OB }$ = $\frac{2}{5}$ => $\frac{ВO }{NO }$ = $\frac{5}{2}$ , так как интересует отрезок BN, а не NB.

Ответ: 5:2

**Задача 4**

*Усложнение: (помимо теоремы Менелая нужно), зная отношение части отрезка к целому, найти отношение одной части к другой.*

Точки D и F лежат на сторонах AB и BC треугольника АВС, при этом

AD : DB = 1 : 2 и BF : FC = 2 : 3. Прямая DF пересекает прямую АС в точке К. Найти АК : AC. [3]

Решение:



По условию $\frac{AD}{DB}$ = $\frac{1}{2}$ , $\frac{BF}{FC}$ = $\frac{2}{3}$

Применим теорему Менелая.

Рассмотрим ∆ АВС и секущую FK

$ \frac{AD }{DB } $• $\frac{BF}{FC}$ • $\frac{CK}{KA}$ = 1

$ \frac{1 }{2 } $• $\frac{2}{3}$ • $\frac{CK}{KA}$ = 1

$\frac{CK}{KA}= \frac{3∙2}{2∙1}$ = 3

$\frac{CK}{KA}= \frac{3}{1}$ => СК = 3х, а КА = 1х => АС = 3х – 1х = 2х, Точка А принадлежит КС => КС = КА+АС => $\frac{AK}{AC}$ = $\frac{1}{2}$

Ответ: 1:2

**Задача 5**

*Усложнение: теорема Менелая применяется к трем различным треугольникам, задача полезна для отработки навыков применения теоремы Менелая, так как в ней рассматривают три различных треугольника на одном чертеже.*

Точка К лежит на стороне ВС треугольника АВС, точка D – на стороне АС, при этом ВК : КС = 2 : 1 и AD : DC = 1 : 3. Отрезки АК и ВD пересекаются в точке О. Чему равно отношение ВО : ОD и АО : ОК?

Прямая KD пересекает прямую АВ в точке М. Чему равно отношение МА : АВ? [3]

Решение:



1. Применим теорему Менелая:

Рассмотрим ∆ DВС и секущую АК , $\frac{OD}{BO}$ ∙ $\frac{ВК}{КС}$ ∙ $\frac{СА}{AD}$ = 1 =>$ \frac{OD}{BO}$ ∙ 2∙ $\frac{4}{1}$ = 1 => $\frac{OD}{BO}=1:8$ , ВО : ОD=8:1

Рассмотрим ∆ АКС и секущую BD, $ \frac{СD}{DA}$ ∙ $\frac{AO}{OК}$ ∙ $\frac{KB}{BC}$ = 1 =>$ 3 ∙ \frac{AO}{OK}$ ∙ $\frac{2}{3}$ = 1 => $\frac{AO}{OК}=$ $\frac{1}{2}$

1. Применим теорему Менелая.

Рассмотрим ∆ АВС и секущую DК, $\frac{АD}{DС}$ ∙ $\frac{СК}{КВ}$ ∙ $\frac{BМ}{АМ}$ = 1 =>$ \frac{1}{3} ∙\frac{1}{2} ∙\frac{BМ}{АМ}$ = 1 =>

 $\frac{BМ}{АМ}$ = $\frac{6}{1}$ => $\frac{МА}{АВ}$ = $\frac{1}{5}$

Ответ: $8:1$; 1:2; 1:5

**Задача 6**

*Усложнение: не достаточно ЯВНО заданных отношений.*

На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне РR – точка L, причем NQ = LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении m:n, считая от точки Q. Найдите отношение PN : PR. [1]

*Указание: после применения теоремы Менелая, искомый отрезок в равенстве заменяется равным ему.*

Решение:



Рассмотрим треугольник PQL и секущую NS.

По теореме Менелая:

$\frac{PN }{NQ } $• $\frac{QS}{SL}$ • $\frac{LR}{PR}$ = 1

Пусть NQ = LR = а, тогда $\frac{PN }{a } $• $\frac{m}{n}$ • $\frac{a}{PR}$ = 1 , $\frac{PN }{PR} $= $\frac{n}{m}$

Ответ: n: m

**Задача 7**

*Усложнение: недостаточно явно заданных отношений, теорема Менелая применяется дважды.*

На сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты соответственно точки K, L и M, причем АК : КВ = 2:3, BL : LC = 1:2, CM : МА = 3 : 1. В каком соотношении отрезок KL делит отрезок ВМ? [1]

*Указание: теорема Менелая применяется первый раз к данному треугольнику, а второй раз к его части. .Используй, найденное отношение частей стороны исходного треугольника для того, чтобы найти отношение этих же отрезков в другом треугольнике.*

Решение:



Рассмотрим треугольник АВС, где прямая KL пересекает две стороны АВ и ВС, в точках K и L, и продолжение третьей АС в точке Р.

По теореме Менелая

$\frac{CL}{LB}$ **∙** $\frac{BK}{KA}$ **∙** $\frac{AP}{PC}$ **=** 1 => $\frac{2}{1}$ **∙** $\frac{3}{2}$ **∙**$ \frac{AP}{ PC}$ **=** 1 => $\frac{AP}{ PC}$ **=** $\frac{1}{3}$

Пусть АР = m, тогда АС =РС-РА = 2m, в то же время АС= 4z, значит m = 2z, АР = 2z, AM = 1z, MP = 3z

Рассмотрим треугольник АВМ, где прямая SK пересекает стороны АВ и ВМ, в точках K и S, соответственно и продолжение третьей стороны АМ в точке P.

$\frac{ВS}{SM}$ **∙** $\frac{MP}{PA}$ **∙** $\frac{AK}{KB}$= 1

$\frac{ВS}{SM} $**∙** $\frac{3}{2}$ **∙** $\frac{2}{3}$ **=** 1

$\frac{ВS}{SM} $= $\frac{1}{1}$

Ответ: 1:1

**Задача 8**

*Усложнение:*

* *Нет явных отношений в условии;*
* *Не очевидны рассматриваемые треугольники;*
* *После применения теоремы Менелая находить искомую величину алгебраическим способом.*

В треугольнике АВС на основании АС взяты точки Р и Q так, что АР < AQ. Прямые ВР и ВQ делят медиану АМ на три равные части. Известно, что РQ = 3. Найдите АС. [4]

*Указание:*

* *Рассмотрим разные секущие к одному треугольнику.*
* *С помощью теоремы Менелая можно составить уравнение, в котором*

*части отрезка СА выражаются через известный отрезок PQ = 3*

Решение:



1. Рассмотрим треугольник АВС и секущую ВQ.

 AS : SM=2:1, так как АМ разделена на три равные части

 МВ : ВС=1:2, так как М- середина ВС

По теореме Менелая:

$\frac{AS }{SM } $• $\frac{MB}{BС}$ • $\frac{CQ}{QA}$ = 1 =>$ \frac{2}{1} ∙\frac{1}{2} ∙\frac{CQ}{QA} $ = 1 => CQ = QA

1. Рассмотрим треугольник АBС и секущую ВL.

Пусть СQ = АQ = х

СР=СQ+QР=х+3; РА=АQ-QР=х-3. По теореме Менелая:

$\frac{AL }{LM } $• $\frac{MB}{BC}$ • $\frac{CP}{PA}$ = 1 =>$ \frac{1}{2} ∙\frac{1}{2} ∙\frac{x+3}{x-3} $ = 1

1. Раскрываем пропорцию х+3 = 4 (х-3)

 3х = 3+12

 х = 5

СА = CQ + QA =2∙ 5 = 10

Ответ: 10

**Задача 9**

*Усложнение:*

* *задача повышенной сложности;*
* *в задаче недостаточно данных, чтобы использовать в одном треугольнике теорему Менелая;*
* *требуется выполнить алгебраические преобразования.*

В треугольнике АВС точки D и К лежат соответственно на сторонах АВ и АС, отрезки ВК и CD пересекаются в точке О, при этом ВО : OK = 3 : 2 и CO : OD = 2 : 1. Найти в каком отношении точка К делит сторону АС, т.е. АК : КС. [1]

*Указания:*

* *Рассмотреть два треугольника, в которые входят отрезки АК и КС;*
* *Выразить дважды нужное отношение через неизвестное, используя утверждение: длина отрезка равна сумме его частей; чтобы сумму разделить на число- можно каждое слагаемое разделить на число.*
* *Составить уравнение.*

Решение:



По условию $\frac{ВО}{ОК}$ = $\frac{3}{2}$ , $\frac{СО}{ОD}$ = $\frac{2}{1}$

1. Рассмотрим треугольник АВК и секущую DС.

Применим теорему Менелая, выразим отношение $\frac{AК }{КС }$

$\frac{AD }{DB } $• $\frac{BO}{OK}$ • $\frac{KС}{СA}$ = 1, $\frac{AD }{DB }$ = $\frac{2CA}{3КС}$ ; $\frac{AD }{DB }$= $\frac{2}{3}$ ($\frac{AК }{КС }+1$), так как СА=АК+КС

$\frac{AK}{KC }+1= \frac{3AD }{2DB }$ , $\frac{AK }{KC }$ = $\frac{3 }{2 }$ ∙ $\frac{AD }{DB }$ - 1 (\*)

1. Рассмотрим треугольник АDС и секущую ВК

Применим теорему Менелая, выразим отношение $\frac{AK }{KC }$

$\frac{AK }{KC } $• $\frac{CO}{OD}$ • $\frac{DB}{AB}$ = 1, $\frac{AK }{KC } $• $\frac{2}{1}$ • $\frac{DB}{AB}$ = 1

$\frac{AK }{KC }$ = $\frac{1}{2}$ ∙ $\frac{AB}{DB }$= $\frac{1}{2}$ ($\frac{AD }{DB}+1$), так как АВ=АD+DВ

1. Приравниваем выраженные отношения. Пусть $ \frac{AD }{DB}$ = m

 $\frac{3 }{2 }$ m – 1 = $\frac{1}{2} (m+1)$ │∙ 2

 3m - 2 = m + 1

 2m = 3

 m = $\frac{3 }{2 }$

1. Находим нужное отношение из выражения (\*)

 $\frac{AК }{КС }$ = $\frac{3 }{2 }$ ∙ $\frac{3 }{2 }$ - 1 = $\frac{9}{4}$ – 1 = $\frac{5}{4}$

Ответ: 5:4

**Задача 10**

*Усложнение: отношение сторон треугольника необходимо использовать для нахождения отношения площадей.*

В тре­уголь­ни­ке  ABC на его ме­ди­а­не  BM  от­ме­че­на точка  K  так, что BK : KM = 10 : 9. Прямая AK пе­ре­се­ка­ет сто­ро­ну BC в точке P. Найдите от­но­ше­ние пло­ща­ди четырёхугольника KPCM к пло­ща­ди тре­уголь­ни­ка ABС. [4]

*Указание:*

* *Найти отношение тех частей сторон треугольника, которые являются противоположными сторонами искомого четырехугольника;*
* *Использовать утверждение: - если две стороны треугольников сонаправлены, то отношение площадей равно отношению произведений сонаправленных сторон.*
* *Если четырехугольник является частью данного треугольника, то его площадь равна разности площадей данного треугольника и его части.*
* *Медиана делит треугольник на два равновеликих (с равными площадями)*

*В пунктах 2-4 специально рассматривается избыточное количество треугольников, чтобы показать возможности теоремы Менелая, проверить решения учащихся, которые рассматривали другие способы решения.*

Решение:

**

Найти: $\frac{S KPCM }{S ABC}$ - ?

1. Рассмотрим ∆ МВС и секущую АР:

$\frac{СР}{РВ}$ **∙** $\frac{ВК}{КМ}$ **∙** $\frac{МА}{АС}$ **=** 1, $\frac{СР}{РВ}$ **∙** $\frac{10}{9}$ **∙** $\frac{1}{2}$ **=** 1, $\frac{СР}{РВ}$  **=** $\frac{9}{5}$

Дополнительное построение: СК ∩ АВ = L

1. Рассмотрим ∆ АРС и секущую СК:

$\frac{АК}{КР}$ **∙** $\frac{РВ}{ВС}$ **∙** $\frac{СМ}{МА}$ **=** 1, $\frac{АК}{КР}$ **∙** $\frac{5}{9+5}$ **∙** $1$**=** 1, $\frac{АК}{КР}$ **=** $\frac{14}{5}$

1. Рассмотрим ∆ АВР и секущую СК:

$\frac{AL}{LB}$ ∙ $\frac{BC}{CP}$ ∙ $\frac{PK}{KA}$ = 1, $\frac{AL}{LB}$ ∙ $\frac{14}{9}$ ∙ $\frac{5}{14} $= 1, $\frac{AL}{LB}$ = $\frac{9}{5}$

1. Рассмотрим ∆ LВC и секущую АР:

$\frac{LK}{KC}$ ∙ $\frac{CP}{PB}$ ∙ $\frac{BA}{АL}$ = 1, $\frac{LK}{KC}$ ∙ $\frac{9}{5}$ ∙ $\frac{9+14}{19}$= 1, $\frac{LK}{KC}$ = $\frac{5 ∙ 19}{23 ∙ 3}$

Стороны треугольников сонаправлены, следовательно, их площади относятся как отношения сонаправленных сторон.

1. Рассмотрим ∆ КРВ и ∆ АСВ:

$\frac{BK ∙BP}{BM ∙BC}$ = $\frac{S KPB}{S MBC}$

$\frac{S KPB}{S MBC}$ = $\frac{5y·10x}{(5+9)y·(10+9)x}$ = $\frac{5·10}{14·19}$ = $\frac{25}{133}$ => SРКВ = $\frac{25}{133} S MBC$

1. Находим площадь нужного четырехугольника

SМКРС = SМВС – SКВР

SМКРС = $\frac{133-25}{133} $S MBC = $\frac{108}{133}$ S MBC

1. Медиана делит треугольник два равновеликих SМВС = $\frac{1}{2}$ · SАВС =>

SМКРС = $\frac{1}{2} $· $\frac{108}{133}$ SАВС

1. $\frac{S MKCP}{S ABC}$ = $\frac{54}{133}$

Ответ: 54:133

**Задача 11**

*Усложнение:* *отношение сторон треугольника необходимо использовать для нахождения отношения площадей.*

В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении AK:BK = 2:3, а на стороне AC – точка L, делящая AC в отношении AL: LC = 5:3. Точка О пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние . Найдите длину стороны AB. [4]

*Указание:* *Зная высоту и площадь треугольника, найти его основание. Расстояние от точки до прямой равно длине, перпендикуляра, проведенного из данной точки до данной прямой.*

*В задаче используйте утверждение об отношении площадей:*

*- если два треугольника имеют общий угол, то отношение площадей равно отношению произведений сторон, образующих эти углы.*

*- если два треугольника имеют равные высоты, то отношение площадей этих треугольников равно отношению сторон, на которые проведены равные высоты.*

Решение:



1. Треугольники ABL и ABC имеют одинаковую высоту, проведенную из вершины B.

 = $\frac{AL}{AC}$ = $\frac{5n}{8n}$ = , тогда S = $\frac{5}{8}$ · 6 = 

1. Прямая KC пересекает в треугольнике ABL две стороны и продолжение третьей. По теореме Менелая:

$\frac{AK}{KB}$ ·$\frac{BQ}{QL}$ · $\frac{LC}{CA}$ = 1, $\frac{2m}{3m}$ ·$\frac{BQ}{QL}$ · $\frac{3n}{8n}$ = 1, $\frac{BQ}{QL}$ = $\frac{4}{1}$, то есть BQ = 4p, QL = p

1. Треугольники KBQ и ABL имеют общий угол, значит,

 = $\frac{KB ·BQ}{AB ·BL}$ = $\frac{3m·4p}{5m ·5p}$ = , тогда S = S*ABL*

S = . = 

1. Расстояние от точки Q до прямой АВ является высотой ∆ КВQ

S = $\frac{1}{2}$ ·KB $·$ $\frac{3}{2}$ = > KB = $\frac{4 ∙ S KBQ }{3}$ = $\frac{4}{3}$ = > 3m = $\frac{12}{5}$ , тогда m = $\frac{4}{5}$ ,

AB=5m = 4

Ответ: 4.

**Задача 12**

*Усложнение:*

* *теорема Менелая применяется к четырем разным треугольникам.*
* *в задаче используется утверждение об отношении площадей.*

Точки В1 и C1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём AB1 : B1C = AC1 : C1B. Прямые BB1 и CC1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB1OC1 к площади треугольника ABC, если известно, что AB1 : B1C = AC1 : C1B = 1 : 4. [2]

*Указание:*

* *примени теорему Менелая к двум треугольникам, у которых естьобщая сторона, а другая сторона первого треугольника является продолжением стороны второго.*
* *если два треугольника имеют равные высоты, то отношение площадей этих треугольников равно отношению сторон, на которые проведены равные высоты.*

Решение:



а) 1. Рассмотрим треугольник КАС, ВВ1 – секущая.

 По теореме Менелая $\frac{CB}{BK}$ **∙** $\frac{KO}{OA}$ **∙** $\frac{AB1}{B1C}$ **=** 1

2. Рассмотрим треугольник ВАК1, СС1- секущая.

  $\frac{BC}{CK}$ **∙** $\frac{KO}{OA}$ **∙** $\frac{AC1}{C1В}$ **=** 1

Поскольку по условию задачи  $\frac{AC1}{C1В}$ = $\frac{AB1}{B1C}$ получаем:  $\frac{CB}{BK}$ = $\frac{BC}{CK}$ =>

СК = ВК, то есть АК делит пополам ВС, что и требовалось доказать.

б) 1. Рассмотрим треугольник ВС1С и АК– секущая.

По теореме Менелая  $\frac{АВ}{АС1}$ **∙** $\frac{С1О}{ОС}$ **∙** $\frac{СК}{КВ}$ **=** 1 =>  $\frac{С1О}{ОС}$ = $\frac{1}{5}$ , так как СК = КВ

(пункт **а**), и AB1 : B1C = AC1 : C1B (по условию)

1. Рассмотрим треугольник ВС1С и АК – секущая.

По теореме Менелая  $\frac{СА}{АВ1}$ **∙** $\frac{В1О}{ОВ}$ **∙** $\frac{ВК}{КС}$ **=** 1 =>  $\frac{В1О}{ОВ}$ = $\frac{1}{5}$

Заметим, что треугольники AB1B и BCB1 имеют общую высоту, проведенную из вершины В на сторону АС.

следовательно: $\frac{SAB1B}{SBCB1}$  = $\frac{АВ1}{СВ1}$ = $\frac{1}{4} $

Поэтому  $\frac{SAB1B}{SABC}$ = $\frac{1}{5}$

Аналогично доказываем, что $\frac{SCAC1}{SABC}$ = $\frac{1}{5}$

Треугольники AOC и AВ1O имеют общую высоту, проведенную из вершины О на сторону АС, поэтому$ \frac{SAB1O}{SAOC}$ = $\frac{1}{5}$ =>

$\frac{SAC1O}{SAC1C}$ = $\frac{1}{6}$ => $\frac{SAC1O}{SABC}$ = $\frac{1}{30}$ .

  Аналогично доказываем, что $\frac{SAВ1O}{SAВC}$ = $\frac{1}{30}$

 Тогда $\frac{SAB1OC1}{SABC}$ = $\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{15}$

 Ответ: 1:15

**Задача 13**

*Усложнение: олимпиадная задача*

АА1,СС1 – биссектрисы треугольника ABC. Прямые С1 А1 и АС пересекаются в точке Е. Докажите, что луч ВЕ является биссектрисой внешнего угла треугольника ABC.

*Указание:*

* *биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежающим сторонам треугольника.*
* *биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, отстоящей от концов этой стороны на расстояниях пропорциональных прилежающим сторонам треугольника.*

*(свойство биссектрисы внешнего угла)*

Решение:



1. Рассмотрим ∆ АВС и секущую С1Е

$\frac{АС1}{С1B}$ **∙** $\frac{AB1}{А1C}$ **·** $\frac{СЕ}{ЕА}$ **=** 1 (\*)

так как

$\frac{ВА1}{А1С}$ **=** $\frac{AB}{AC}$(свойство биссектрисы АА1)

$\frac{АС1}{С1B}$ **=** $\frac{AC}{CB}$(свойство биссектрисы CC1)

Подставляем в (\*) и получаем $\frac{AC}{CB}$ **∙** $\frac{AB}{AC}$ **·** $\frac{CE}{ЕА}$ **=** 1

 $\frac{AB}{BC}$  **=** $\frac{EA}{EC}$ **< =** $\frac{AC}{CB}$ **∙** $\frac{AB}{AC}$ **·** $\frac{CE}{ЕА}$ **=** 1

1. $\frac{AB}{BC}$  **∙** $\frac{CE}{EA}$ **=** 1 = > $\frac{AB}{BC}$ = $\frac{EA}{EC}$, т.е.точка Е отстоит от концов стороны АС (ЕА : ЕС) на расстояниях пропорциональных прилежащим сторонам АВ и ВС внешнего угла В треугольника АВС, следовательно ВЕ – биссектриса внешнего угла ∆ АВС. Что и требовалось доказать.

**III Задачи для самостоятельного решения**

Задача 1

На сторонах АВ и АС $△$АВС взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=2$.

Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите отношение отрезков $\frac{BK}{KN}$.

[10]

Задача 2

На стороне ВС треугольника АВС отмечена точка К. Оказалось, что отрезок

АК  пересекает медиану ВD в точке Е так, что АЕ=ВС.

А) Докажите, что ВК=КE.

Б) Найдите площадь четырехугольника CDEК, если известно, что АВ=13, АЕ=7, АD=4. [8]

Задача 3

На стороне ВС $△$АВС выбрана точка F. Оказалось, что отрезок AF пересекает

медиану BD в точке Е так, что АЕ = BE. Доказать, что BF = FE. [8]

Задача 4

Площадь $△ABC$ равна S. Отрезок AM поделил сторону ВС в отношении ВМ : МС = 4 : 3, а отрезок BN поделил сторону AC в отношении AN : NC = 5 : 3. Найдите площадь четырехугольника NKMC (K-точка пересечения AM и BN)

[5]

Задача 5

На сторонах ВС, СА и АВ треугольника АВС взяты точки A1 ,  B1 и C1 такие, что $\frac{AC\_{1}}{C\_{1}B}=\frac{BA\_{1}}{A\_{1}C}=\frac{CB\_{1}}{B\_{1}A}=2.$ Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми АА1, ВВ1 и СС1 , если площадь треугольника АВС равна S. [5]

Задача 6

На медиане СМ треугольника АВС дана точка Р. Прямые АР и ВР Пересекают стороны ВС и АС соответственно в точках А1 и В1. Доказать, что отрезок А1В1 параллелен АВ. [11]

Задача 7

В треугольник АВС вписана полуокружность так, что её диаметр лежит на стороне ВС, а дуга касается сторон АВ и АС соответственно в точках С1 и В1. Доказать, что прямые пересекаются на высоте АА1 треугольника. [8]

Задача 8

Пусть AD – медиана треугольника АВС. На стороне AD взята точка K так, что AK : KD= 3 : 1. Прямая ВК разбивает треугольник АВС на два треугольника. Найдите отношение площадей этих треугольников. [11]

Задача 9

В треугольнике АВС, описанном около окружности, АВ = 8, ВС = 5, АС = 4.

А1 ,В1и С1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам ВС, АС и ВА. Р – точка пересечения отрезков АА1 и СС1. Точка Р лежит на биссектрисе ВВ1. Найдите АР : РА1. [11]

Задача 10

В треугольник АВС, описанном около окружности, АВ = 8, ВС = 12, АС = 9, А1 и С1 – точки касания, лежащие соответственно на сторонах ВС и АВ. Q – точка пересечения отрезков АА1 и ВВ1. Q лежит на высоте ВВ1. Найдите отношение ВQ : QB1. [11]

Задача 11

Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник. [4]

Задача 12

Биссектрисы BF и AD треугольника АВС пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника АВС, если SBQF = 1,2 AC = 3 AB, 3BC =AB. [5]

Задача 13

В треугольнике АВС, площадь которого равна 6, на стороне АВ взята точка К, делящая эту сторону в отношении АК:ВК = 2:3, а на стороне АС – точка L, делящая АС в отношении AL:LC = 5:3. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой АВ на расстояние . Найдите длину стороны АВ. [11]

Задача 14

В треугольнике АВС точки К и L принадлежат соответственно сторонам АВ и ВС. АК:ВК = 1:2, CL:BL = 2:1. Q – точка пересечения отрезков AL и CK. Найдите площадь треугольника АВС. [5]

Задача 15

На стороне АС в треугольнике АВС взята точка К, АК = 1, КС = 3.

На стороне АВ взята точка L. AL : LB = 2 : 3. Q – точка пересечения прямых ВК и CL. S AQC = 1. Найдите длину высоты треугольника АВС, опущенной из вершины В. [7]

Задача 16

Через середину М стороны ВС параллелограмма АВСD, площадь которого равна 1, и вершину А проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника QMCD. [6]

Задача 17

В трапеции ABCD с основанием AD и ВС через середину А проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке Е и боковую сторону CD в точке К, причем BE : ED = 1 : 2 и CK : KD = 1 : 4. Найдите отношение длин оснований трапеции. [5]

Задача 18

На стороне NP квадрата MNPQ взята точка А, а на стороне PQ – точка В так, что NA : AP = PB : BQ = 2 : 3. Точка L является точкой пересечения отрезков МА и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA? [11]

**IV ОТВЕТЫ**

$1. \frac{BK}{KN}=\frac{3}{4}$ ;

2.  $\frac{451\sqrt{3}}{93}$ ;

4. $ \frac{48}{329}S; $

5. $\frac{1}{7}S;$

8. $\frac{3}{2}$;

9. $\frac{70}{9}$;

10. $\frac{162}{35}$;

11. $\frac{11}{7};$

12. $\frac{115}{16}$;

13. 4;

14. 1,75;

15. 1,5;

16. $\frac{5}{12}$ ;

17. $\frac{1}{4}$ ;

18. $\frac{25}{4}$ .

**V Литература**

1. Гордон Р.К. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия // Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко.- М.: МЦНМО, 2011
2. ЕГЭ 2012. Математика. Решение задачи С 4.
3. Математика. Планиметрия. Заочная физико-техническая школа. Московского физико-технического института, 2018 г
4. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии. Ч.1 2-е изд. –М.: Наука 1991.
5. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам.
6. Тренировочный вариант ЕГЭ № 149 Ларина.
7. Тренировочный вариант ЕГЭ № 207 Ларина.
8. Тренировочный вариант ЕГЭ № 231 Ларина.
9. [Фельдман И. В., репетитор по математике](https://ege-ok.ru/repetitor-po-matematike/).
10. www.ege-ok.ru - Подготовка к ЕГЭ по математике.
11. <http://yandex.ru/clck/jsredir?bu=1pyc&from=yandex.ru>